

# Todas as afirmações verdadeiras são demonstráveis

Jaime Gaspar\*

14 de Dezembro de 2012

## 1 Motivação

Todas as afirmações demonstráveis são verdadeiras. Mas teremos o recíproco: todas as afirmações verdadeiras são demonstráveis? Isto seria o sonho de uma matemática onisciente capaz de demonstrar todas as afirmações verdadeiras. O teorema da completude dá vida a este sonho:

todas as afirmações verdadeiras são demonstráveis. (\*)

Neste texto vamos enunciar e demonstrar o teorema da completude. Como sublinhado em (\*), este teorema fala de afirmações, verdades e demonstrações pelo que, para o podermos enunciar e demonstrar, primeiro precisamos de definir as noções de afirmação, verdade e demonstração.

## 2 Afirmação

Começamos por definir a noção de afirmação. Informalmente, uma afirmação é uma expressão como  $\neg(L \vee M) \vee M \vee L$ . Recordemos que algumas destas expressões são bem formadas como por exemplo  $\neg(L \vee M) \vee M \vee L$ , enquanto outras são mal formadas como por exemplo  $L \neg \vee M) \vee \vee ML$ .

**Definição.** Fixemos uma lista de símbolos distintos  $L, M, N, \dots$  aos quais chamamos *letras*. Chamamos *afirmação*, e denotamos por  $A, B, C, \dots$ , a uma expressão bem formada construída a partir de letras por meio dos símbolos  $\neg, \vee$  e dos parênteses.

**Exemplo.** A expressão  $\neg(L \vee M) \vee M \vee L$  é uma afirmação porque é bem formada e construída a partir de letras  $L$  e  $M$  por meio de  $\neg, \vee$  e dos parênteses.

O leitor talvez objete notando que alguns símbolos estão em falta, como por exemplo  $\Rightarrow$  e  $\exists$ . A omissão de  $\Rightarrow$  não é relevante: sempre que quisermos falar

---

\*INRIA Paris-Rocquencourt,  $\pi r^2$ , Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, F-78153 Le Chesnay, France. Apoiado financeiramente pela Fondation Sciences Mathématiques de Paris francesa. mail@jaimegaspar.com, www.jaimegaspar.com. Agradeço a Joana Cerveira, Fernando Ferreira, Gilda Ferreira e Rafael Pacheco; no entanto, este texto é da minha inteira responsabilidade.

de  $A \Rightarrow B$  podemos em vez disso falar de uma afirmação equivalente que só use  $\neg$  e  $\vee$  tal como  $\neg A \vee B$ ; por exemplo, no exemplo anterior em vez de falarmos de  $L \vee M \Rightarrow M \vee L$ , falamos de  $\neg(L \vee M) \vee M \vee L$ . Já a omissão de  $\exists$  é relevante:  $\exists x A(x)$  não é equivalente a nenhuma afirmação só com  $\neg$  e  $\vee$ . Assim, omitir  $\exists$  empobrece de forma relevante as nossas afirmações, mas optámos por o fazer porque simplifica imenso o teorema da completude.

### 3 Verdade

Vamos agora definir a noção de verdade. Denotemos por V (respetivamente, F) o valor de verdade verdadeiro (respetivamente, falso). Recordemos que podemos calcular o valor de verdade de uma afirmação por meio de uma tabela de verdade. Por exemplo, a tabela de verdade seguinte dá-nos o valor de verdade de  $\neg(L \vee M) \vee M \vee L$  em função dos valores de verdade de  $L$  e  $M$ :

$L$	$M$	$\neg(L \vee M) \vee M \vee L$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

**Definição.** Dizemos que uma afirmação  $A$  é *verdadeira*, e denotamos por  $\models A$ , se e só se todas as entradas da última coluna da tabela de verdade de  $A$  são V.

**Exemplo.** Temos  $\models \neg(L \vee M) \vee M \vee L$  porque todas as entradas da última coluna da tabela de verdade de  $\neg(L \vee M) \vee M \vee L$  acima são V.

### 4 Demonstração

Finalmente, vamos definir a noção de demonstração. Informalmente, uma demonstração é um argumento em vários passos em que cada passo é um axioma ou resulta de passos anteriores por meio de uma regra. Recordemos que, informalmente: um axioma  $A$  é a asserção “ $A$  é verdadeiro”; uma regra  $\frac{A_1 \dots A_n}{B}$  é a asserção “se  $A_1, \dots, A_n$  são verdadeiros, então  $B$  é verdadeiro”, onde os  $A_i$ s chamam-se premissas e o  $B$  chama-se conclusão.

*Notação.* Associamos  $\bigvee_{k=1}^n A_k = A_1 \vee \dots \vee A_n$ , à direita; por exemplo,  $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 = A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee A_4))$ . Denotamos por  $\vec{A}$  uma expressão da forma  $\bigvee_{k=1}^n A_k$  (eventualmente  $n = 0$ , caso em que não há  $A_i$ s, isto é,  $\vec{A}$  é vazio). Denotamos por  $\sigma$  uma permutação de (isto é, uma bijeção de e para)  $\{1, \dots, n\}$ .

**Definição.** Consideremos os axiomas e as regras da forma

$$A \vee \neg A \vee \vec{B}, \quad (\text{A})$$

$$\frac{A_1 \vee \cdots \vee A_n}{A_{\sigma(1)} \vee \cdots \vee A_{\sigma(n)}}, \quad (\text{R}_1)$$

$$\frac{A \vee (B \vee \vec{C})}{(A \vee B) \vee \vec{C}}, \quad (\text{R}_2)$$

$$\frac{A \vee \vec{B}}{\neg \neg A \vee \vec{B}}, \quad (\text{R}_3)$$

$$\frac{\neg A \vee \vec{C} \quad \neg B \vee \vec{C}}{\neg(A \vee B) \vee \vec{C}}. \quad (\text{R}_4)$$

Dizemos que uma afirmação  $A$  é *demonstrável*, e denotamos por  $\vdash A$ , se e só se existe uma sequência de afirmações  $D_1, \dots, D_n$ , chamada *demonstração* de  $A$ , tal que  $A = D_n$ , e cada  $D_i$  é um dos axiomas, ou é a conclusão de uma das regras sendo a(s) premissa(s) da regra  $D_j$ (s) com  $j < i$ .

**Exemplo.** Temos  $\vdash \neg(L \vee M) \vee M \vee L$  porque o seguinte é uma demonstração de  $\neg(L \vee M) \vee M \vee L$ :

$$\underbrace{(L \vee M) \vee \neg(L \vee M)}_{\substack{\text{(A) com } A = L \vee M \\ \text{e } \vec{B} \text{ vazio}}}, \quad \underbrace{\neg(L \vee M) \vee L \vee M}_{\substack{\text{conclusão de (R}_1\text{) com} \\ n = 2, A_1 = L \vee M, \\ A_2 = \neg(L \vee M), \\ \sigma(1) = 2 \text{ e } \sigma(2) = 1; \\ \text{a premissa é } D_1}}, \quad \underbrace{\neg(L \vee M) \vee M \vee L}_{\substack{\text{conclusão de (R}_1\text{) com} \\ n = 3, A_1 = \neg(L \vee M), \\ A_2 = L, A_3 = M, \\ \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3 \\ \text{e } \sigma(3) = 2; \\ \text{a premissa é } D_2}}.$$

## 5 Teorema da completude

Depois de termos definido as noções de afirmação, verdade e demonstração, estamos finalmente em condições de enunciar e demonstrar o teorema da completude.

**Teorema da completude.** *Todas as afirmações verdadeiras são demonstráveis (isto é, para toda a afirmação  $A$  tal que  $\models A$  temos  $\vdash A$ ).*

*Demonstração.* A cada afirmação  $A$  atribuímos uma pontuação  $\overline{A}$  da seguinte forma: cada  $\vee$  em  $A$  vale 1 ponto, e cada  $\neg$  em  $A$  que não esteja imediatamente antes de uma letra vale 1 ponto. Demonstramos que (1)  $\models \bigvee_{k=1}^n A_k$  implica (2)  $\vdash \bigvee_{k=1}^n A_k$  por indução completa em  $\sum_{k=1}^n \overline{A_k}$ ; o teorema é o caso  $n = 1$ .

*Caso base*  $\sum_{k=1}^n \overline{A_k} = 0$ . Temos  $\overline{A_i} = 0$  para cada  $A_i$ , logo cada  $A_i$  é uma letra ou a negação de uma letra. Suponhamos (1). Então algum  $A_i$  é uma letra  $L$  e um algum  $A_j$  é  $\neg L$ , caso contrário dávamos valores de verdade às letras de modo que os  $A_k$ s fossem falsos contradizendo (1). Seja  $\vec{A} = \bigvee_{i,j \neq k=1}^n A_k$ . Temos  $\vdash L \vee \neg L \vee \vec{A}$  por (A), isto é,  $\vdash A_i \vee A_j \vee \vec{A}$ , logo (2) por (R<sub>1</sub>).

*Passo de indução*  $\sum_{k=1}^n \overline{A_k} > 0$ . Temos  $\overline{A_i} > 0$  para algum  $A_i$ , logo  $A_i$  é da forma  $B \vee C$  ou  $\neg D$ , onde  $D$  não é uma letra logo é da forma  $\neg B$  ou  $B \vee C$ . Seja  $\vec{A} = \bigvee_{i \neq k=1}^n A_k$ . Basta demonstrar que (3)  $\models A_i \vee \vec{A}$  implica (4)  $\vdash A_i \vee \vec{A}$  porque (1) implica (3) e (4) implica (2) por (R<sub>1</sub>).

*Caso*  $A_i = B \vee C$ . Se (3), isto é,  $\models (B \vee C) \vee \vec{A}$ , então  $\models B \vee C \vee \vec{A}$ , logo  $\vdash B \vee C \vee \vec{A}$  por hipótese de indução (que se aplica porque  $\overline{B} + \overline{C} + \sum_{i \neq k=1}^n \overline{A_k} < \sum_{k=1}^n \overline{A_k}$ ), portanto  $\vdash (B \vee C) \vee \vec{A}$  por (R<sub>2</sub>), isto é, (4).

*Caso*  $A_i = \neg \neg B$ . Se (3), isto é,  $\models \neg \neg B \vee \vec{A}$ , então  $\models B \vee \vec{A}$ , logo  $\vdash B \vee \vec{A}$  por hipótese de indução (que se aplica porque  $\overline{B} + \sum_{i \neq k=1}^n \overline{A_k} < \sum_{k=1}^n \overline{A_k}$ ), portanto  $\vdash \neg \neg B \vee \vec{A}$  por (R<sub>3</sub>), isto é, (4).

*Caso*  $A_i = \neg(B \vee C)$ . Se (3), isto é,  $\models \neg(B \vee C) \vee \vec{A}$ , então  $\models \neg B \vee \vec{A}$  e  $\models \neg C \vee \vec{A}$ , logo  $\vdash \neg B \vee \vec{A}$  e  $\vdash \neg C \vee \vec{A}$  por hipótese de indução (que se aplica porque  $\overline{\neg B} + \sum_{i \neq k=1}^n \overline{A_k}, \overline{\neg C} + \sum_{i \neq k=1}^n \overline{A_k} < \sum_{k=1}^n \overline{A_k}$ ), portanto  $\vdash \neg(B \vee C) \vee \vec{A}$  por (R<sub>4</sub>), isto é, (4). [4]  $\square$

## 6 Sugestões de leitura

Se o leitor estiver interessado em saber mais, o passo seguinte é ler sobre:

*Teorema da completude de Gödel.* Estende o teorema aqui apresentado de modo a abranger afirmações com  $\exists$ . [1, 2, 4]

*Teoremas da incompletude de Gödel.* Demonstram que existem afirmações verdadeiras (num sentido mais geral do que o usado neste texto) que são indemonstráveis. [2, 3, 5]

## Referências

- [1] Vilnis Detlovs e Karlis Podnieks. Introduction to mathematical logic, 2000. <http://www.ltn.lv/~podnieks/mlog/ml.htm>.
- [2] Juliette Kennedy. Kurt Gödel. In Edward N. Zalta, editor, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fevereiro 2007. <http://plato.stanford.edu/entries/goedel/>.
- [3] Karlis Podnieks. What is mathematics: Gödel's theorem and around, 1997. <http://www.ltn.lv/~podnieks/gt.html>.
- [4] S. M. Srivastava. The completeness theorem of Gödel. *Resonance*, 6(7, 8), Julho, Agosto 2001. <http://www.ias.ac.in/resonance/>.
- [5] S. M. Srivastava. Gödel's proof. *Resonance*, 12(2, 3, 5), Fevereiro, Março, Maio 2007. <http://www.ias.ac.in/resonance/>.